Trattamento e codifica di dati multimediali
Esercizi svolti

Luca Chiodini

A.A. 2017/2018

Esercizio 1 Dato il segnale già campionato

$$x(n) = 6.4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot n\right)$$

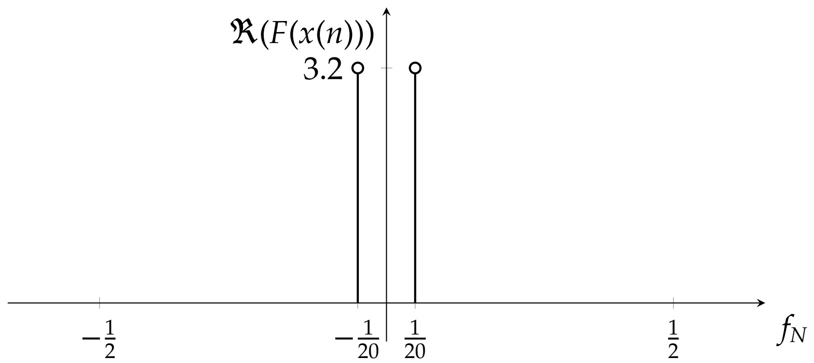
1. Si determini la frequenza normalizzata di tale segnale e si rappresenti la sua trasformata di Fourier.
2. Si calcoli il numero di bit necessari nella conversione analogico-digitale nel caso si adotti un quantizzatore avente
   (a) $\Delta = 0.1$
   (b) $\Delta = 0.02$

   Inoltre, si calcoli il SNR in ciascuna situazione.

1. Per determinare la frequenza normalizzata ci riconduciamo alla forma standard $\cos(2\pi \cdot f_N \cdot n)$, da cui facilmente $2\pi \cdot f_N = {}^1\!/\!_{10}\pi$ e quindi $f_N = {}^1\!/\!_{20}$. Il segnale ha quindi frequenza normalizzata

$$f_N = \frac{1}{20}\left[\frac{\text{cicli}}{\text{campione}}\right]$$

Essendo il segnale un coseno, la trasformata di Fourier ha valori non nulli solo nella parte reale, rappresentata nel seguente grafico.



2. Per una quantizzazione corretta il range dinamico del quantizzatore deve essere ampio almeno tanto quanto quello del segnale, ovvero dev'essere

$$Ds \leq Dq$$
$$2A \leq \Delta \cdot 2^b$$

Nel caso in cui $\Delta = 0.1$ si ha $2^b \geq 128$, da cui $b = 7$. Siamo quindi nella situazione ideale: con passo di quantizzazione pari a 0.1 e 7 bit si riesce a coprire esattamente il range dinamico del segnale.

Per determinare il rapporto SNR possiamo utilizzare la formula nel caso di quantizzatore ideale:

$$SNR_{QI} = 1.76 + 6.02 \cdot b \simeq 44\,\text{dB}$$

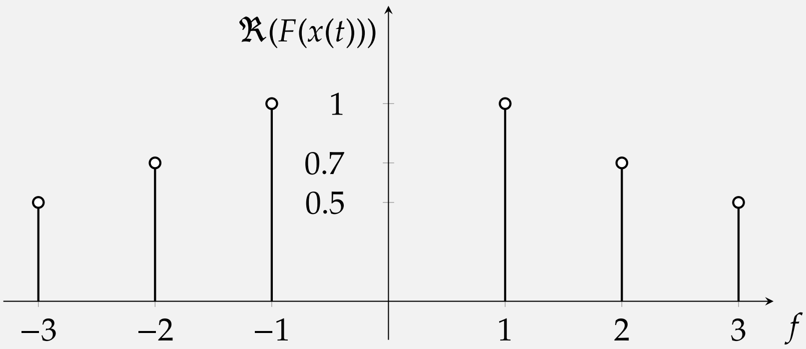
Nella seconda situazione proposta, con $\Delta = 0.02$ si ha $2^b \geq 640$, la cui equazione associata non ha soluzioni intere. Se decidessimo di quantizzare usando 9 bit incorreremmo in saturazione. Utilizziamo quindi 10 bit, consci che non siamo nella situazione ottimale. Determiniamo anche il SNR con la formula generale

$$SNR_Q = 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_N} = 10 \log_{10} \frac{A^2/2}{\Delta^2/12} \simeq 58\,\text{dB}$$

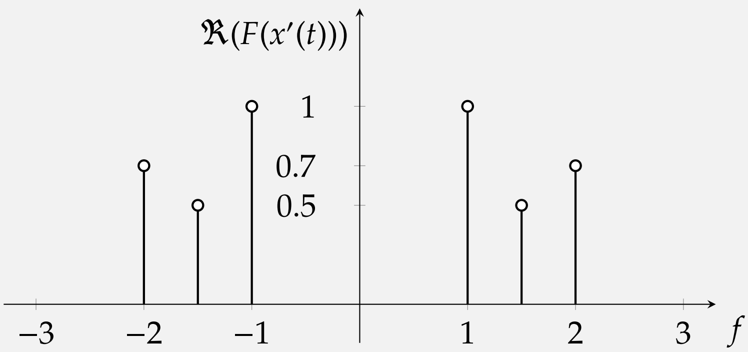
Un rapido calcolo mostra che se avessimo impiegato "bene" i 10 bit, avremmo ottenuto un SNR ancora migliore ($\approx 62\,\text{dB}$). Il passo di quantizzazione ideale sarebbe stato

$$\begin{aligned} \Delta \cdot 2^b &= 2A \\ \Delta \cdot 2^{10} &= 2 \cdot 6.4 \\ \Delta &= 0.0125 \end{aligned}$$

Esercizio 2 Viene fornita la parte reale della trasformata di Fourier di un segnale:



1. Si ricostruisca l'espressione analitica del segnale di partenza x.
2. Si determini la frequenza di campionamento che introduce un alias tale che il nuovo segnale x' abbia trasformata di Fourier come di seguito:



1. Poiché la trasformata ha valori non nulli solo nella parte reale, deduciamo che il segnale è somma di coseni. La sua espressione analitica è

$$x(t) = 2\cos(2\pi \cdot t) + 1.4\cos(2\pi \cdot 2t) + \cos(2\pi \cdot 3t)$$

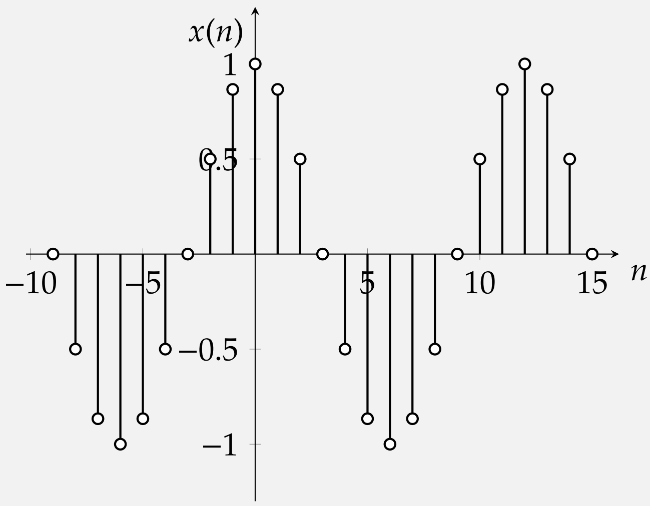
2. Il segnale x' ha invece espressione

$$x'(t) = 2\cos(2\pi \cdot t) + 1.4\cos(2\pi \cdot 2t) + \cos(2\pi \cdot 1.5t)$$

Sicuramente la frequenza di campionamento che ha introdotto l'alias è minore di 6 Hz, che sarebbe stata invece la frequenza minima per non introdurre alias. Osserviamo che la delta presente nel primo grafico a -3 si "sposta" nella trasformata del segnale "frainteso" a 1.5, quindi la frequenza di campionamento usata è stata 4.5:

$$f_C = 4.5\,\mathrm{Hz}\left[\frac{\text{campioni}}{s}\right]$$

Esercizio 3 Dato il segnale già campionato rappresentato nel seguente grafico:



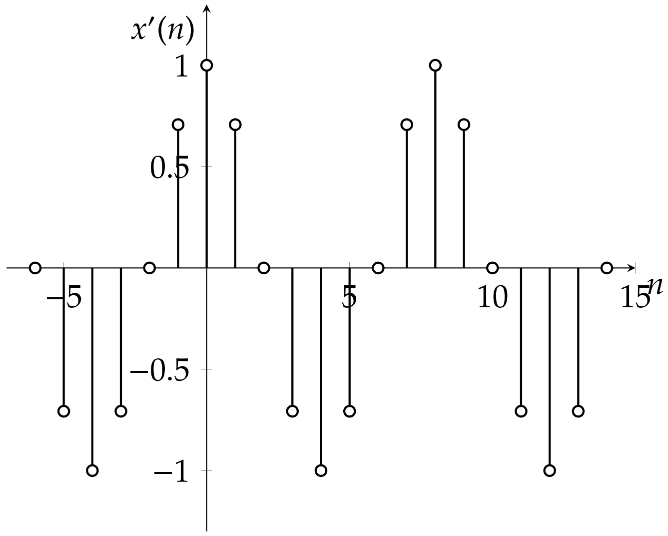
1. Si determini l'espressione analitica del segnale campionato.
2. Si rappresenti un segnale x' avente frequenza normalizzata pari a $1/8$.
3. Si ricostruisca l'espressione analitica del segnale analogico il cui campionamento è rappresentato al punto precedente, sapendo che tale campionamento è stato effettuato con passo
$$T = \frac{1}{16}\left[\frac{s}{\text{campione}}\right]$$

1. L'espressione del segnale campionato è della forma

$$x(n) = \cos(2\pi f_N \cdot n)$$

dove la frequenza normalizzata f_N è espressa in cicli per campione e vale $1/12$ (ovvero occorrono 12 campioni per completare un periodo, ad esempio tra i due picchi a valore 1).

2. Con una minima variazione possiamo rappresentare un segnale simile ma con $f_N = 1/8$



3. Conoscendo che per quest'ultimo segnale il passo di campionamento è stato $T = 1/16$, la frequenza di campionamento è stata

$$f_C = 16 \left[\frac{\text{campioni}}{s}\right]$$

Il segnale originale è della forma

$$x'(t) = \cos(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Resta quindi solo da determinare la frequenza originale, in cicli al secondo:

$$f \left[\frac{\text{cicli}}{s}\right] = f_N \cdot f_C = \frac{1}{8} \left[\frac{\text{cicli}}{\text{campione}}\right] \cdot 16 \left[\frac{\text{campioni}}{s}\right] = 2 \left[\frac{\text{cicli}}{s}\right]$$

L'espressione analitica del segnale risulta quindi $x'(t) = \cos(2\pi \cdot 2t)$.

Esercizio 4 Si consideri il segnale

$$x(t) = 3\cos(600\pi \cdot t) + 2\cos(1800\pi \cdot t)$$

che viene trasmesso su un canale digitale con un bitrate di 10 000 bit al secondo ed è quantizzato con un quantizzatore a 1024 livelli.

1. Si determini la frequenza di campionamento.
2. Si dica se con tale frequenza è soddisfatto il teorema del campionamento. Nel caso non lo fosse, si analizzi il segnale frainteso.
3. Si determini l'espressione analitica del segnale campionato in modo ottimale e si analizzi l'effetto che il campionamento ha sullo spettro di tale segnale.

1. Poiché il quantizzatore è a 1024 livelli, significa che utilizza 10 bit per ogni campione.

   La frequenza di campionamento non è altro che il numero di campioni trasmessi in un secondo, quindi

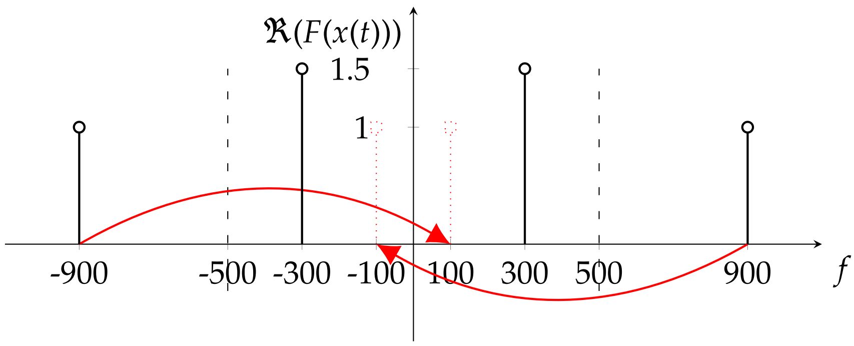
   $$f_C = \frac{10\,000\left[\frac{\text{bit}}{s}\right]}{10\left[\frac{\text{bit}}{\text{campione}}\right]} = 1\,000\left[\frac{\text{campioni}}{s}\right] = 1\,\text{kHz}$$

2. Riscriviamo il segnale mettendo in evidenza la frequenza delle due sinusoidi:

   $$x(t) = 3\cos(2\pi \cdot 300 \cdot t) + 2\cos(2\pi \cdot 900 \cdot t)$$

   La frequenza di Nyquist che garantisce assenza di alias sarà quindi $f_N = 900\,\text{Hz}$, pertanto la frequenza di campionamento minima dovrebbe essere $2 \cdot f_N = 1800\,\text{Hz}$. Rispetto alla frequenza di campionamento determinata al punto precedente, questo campionamento non rispetta il teorema di Shannon e introdurrà quindi aliasing.

   Con 1000 Hz possiamo rappresentare le frequenze da -500 a 500 (centrate sullo 0). Osserviamo la parte reale della trasformata di Fourier del segnale:

   La frequenza $-900\,\text{Hz}$ viene confusa nella replica successiva con la frequenza 100 Hz (essendo 1000 Hz la frequenza di campionamento). Analogamente, la frequenza 900 Hz viene confusa nella replica precedente con la frequenza $-100\,\text{Hz}$.

   Il segnale alterato viene interpretato come

   $$x'(t) = 3\cos(2\pi \cdot 300 \cdot t) + 2\cos(2\pi \cdot 100 \cdot t)$$

3. Il segnale campionato viene espresso in campioni ed è

   $$x(n) = 3\cos(2\pi \cdot f_{N1} \cdot n) + 2\cos(2\pi \cdot f_{N2} \cdot n)$$

   Dobbiamo determinare le due frequenze normalizzate, in cicli per campione.

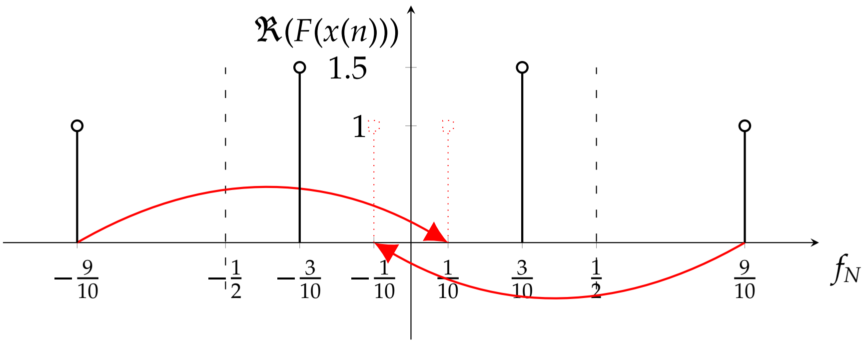
   $$f_{N1} = \frac{f_1}{f_C} = \frac{300\left[\frac{\text{cicli}}{s}\right]}{1000\left[\frac{\text{campioni}}{s}\right]} = \frac{3}{10}\left[\frac{\text{cicli}}{\text{campione}}\right]$$

$$f_{N2} = \frac{f_2}{f_C} = \frac{900\left[\frac{\text{cicli}}{s}\right]}{1000\left[\frac{\text{campioni}}{s}\right]} = \frac{9}{10}\left[\frac{\text{cicli}}{\text{campione}}\right]$$

Avremo

$$x(n) = 3\cos(2\pi \cdot {}^3\!/_{10} \cdot n) + 2\cos(2\pi \cdot {}^9\!/_{10} \cdot n)$$

Per capire l'effetto del campionamento analizziamo direttamente la trasformata di Fourier del segnale campionato, con le frequenze normalizzate.



L'espressione analitica del segnale frainteso è

$$x(n) = 3\cos(2\pi \cdot {}^3\!/_{10} \cdot n) + 2\cos(2\pi \cdot \underbrace{({}^9\!/_{10} - 1)}_{=\pm 1/10} \cdot n)$$

Notiamo che il segno di $1/10$ non produce differenze, essendo coseno una funzione pari.

Esercizio 5 Si considerino i segnali analogici

$$x(t) = 5\sin(\pi \cdot 60t)$$
$$y(t) = 2\cos(\pi \cdot 60t) - 3\sin(\pi \cdot 40t)$$

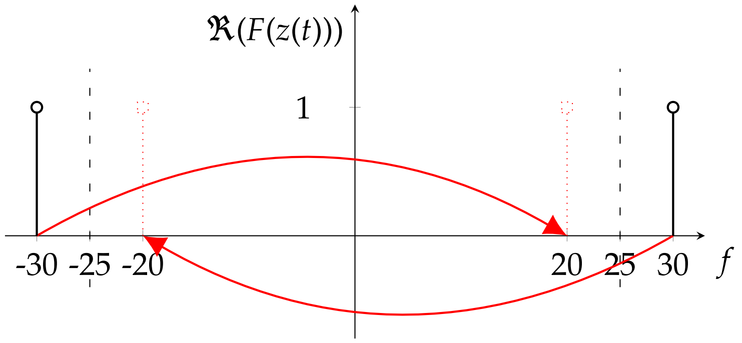
e si consideri il segnale somma $z(t) = x(t) + y(t)$.

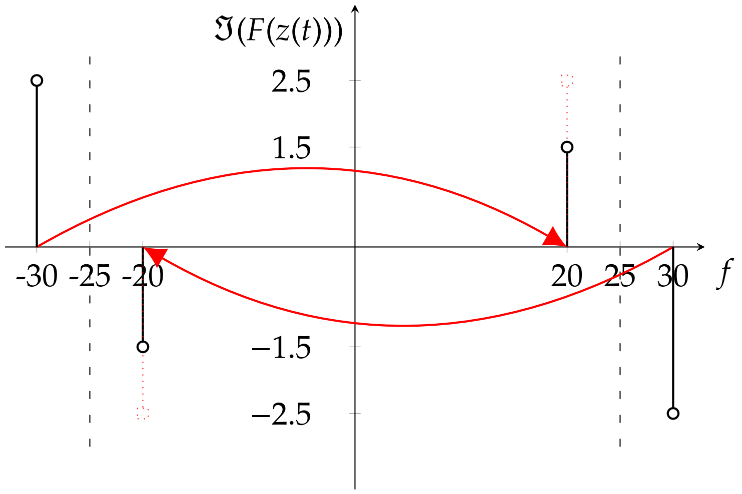
1. Si rappresenti la trasformata di Fourier del segnale somma $z(t)$ e si mostri l'effetto del campionamento con frequenza 50 Hz. Si ricostruisca quindi l'espressione analitica desumibile dalla trasformata.

2. Si caratterizzi un quantizzatore per $x(t)$ affinché il rapporto SNR valga 96 dB.

3. Si determini il comportamento dello stesso quantizzatore applicato al segnale $z(t)$, prima del campionamento.

1. Rappresentiamo parte reale e parte immaginaria della trasformata di Fourier.





Ricostruiamo l'espressione analitica del segnale con alias, facendo attenzione al fatto che nella parte immaginaria della trasformata le repliche alle frequenze ±20 sono da sommarsi.

$$z'(t) = 2\cos(2\pi \cdot 20t) - \underbrace{8}_{2(1.5+2.5)} \cdot \sin(2\pi \cdot 20t)$$

2. Le caratteristiche di un quantizzatore sono Δ e numero di bit. Naturalmente, creiamo un quantizzatore ideale. Facilmente otteniamo

$$1.76 + 6.02 \cdot b \simeq 96\,\text{dB}$$

da cui $6b = 96$, $b = 16$.

La dinamica del quantizzatore vogliamo sia come quella del segnale (caso ideale), quindi:

$$D_S = D_Q = L \cdot \Delta$$

Sappiamo che $D_S = 2 \cdot A = 10$, allora

$$10 = 2^{16} \cdot \Delta$$

da cui

$$\Delta = \frac{10}{2^{16}}$$

3. È ragionevole pensare che il segnale $z(t)$, essendo composto da tre sinusoidi di ampiezza 5, 2 e 3, in qualche istante superi ampiezza 5 e che quindi la sua dinamica sia maggiore di $D_S = 2 \cdot 5 = 10$.

   Utilizzando il quantizzatore progettato nel punto precedente arriveremmo alla saturazione.

Esercizio 6 Dato un sistema con risposta all'impulso

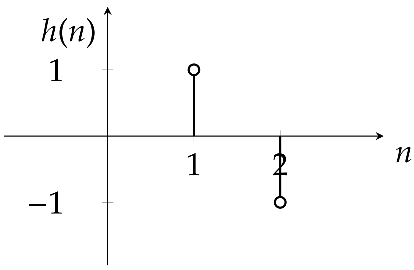
$$h(n) = \delta(n-1) - \delta(n-2)$$

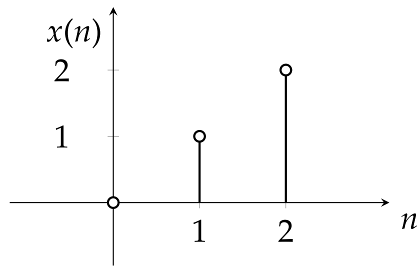
si determini la risposta $y(n)$ del sistema al segnale

$$x(n) = n \cdot (u(n) - u(n-3))$$

dopo aver rappresentato graficamente i segnali.

Osserviamo che $u(n) - u(n-3)$ rappresenta una "finestra" ampia tre campioni (da 0 a 2). Il segnale $x(n) = n$, che è una "rampa", viene quindi considerato solo in una sua porzione.

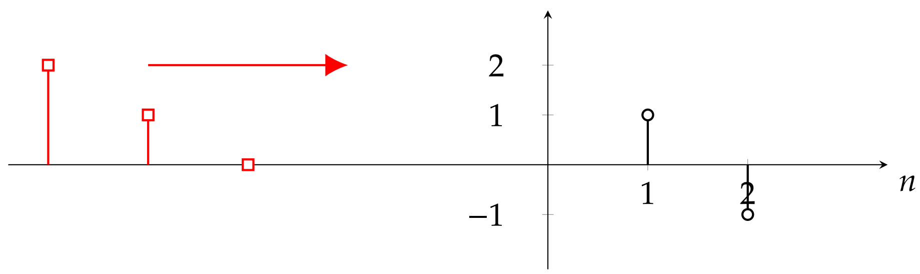




La risposta del sistema sarà

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

dove $*$ denota la convoluzione. Notiamo che nel dominio trasformato la convoluzione è semplicemente un prodotto: $Y(n) = X(n)H(n)$.
Ribaltiamo il segnale $x(n)$ e lo trasliamo ogni volta:



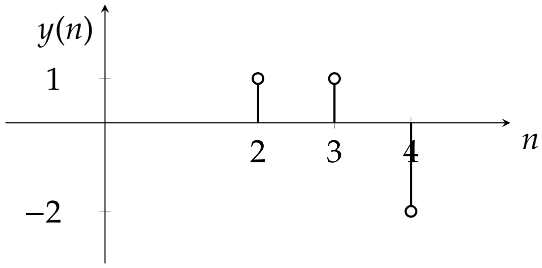
Otteniamo

$$\begin{aligned}
y(0) &= 0 \\
y(1) &= 0 \\
y(2) &= 1 \cdot 1 = 1 \\
y(3) &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 \\
y(4) &= 2 \cdot (-1) = -2 \\
y(5) &= 0
\end{aligned}$$

quindi

$$y(n) = \delta(n-2) + \delta(n-3) - 2\delta(n-4)$$

Graficamente

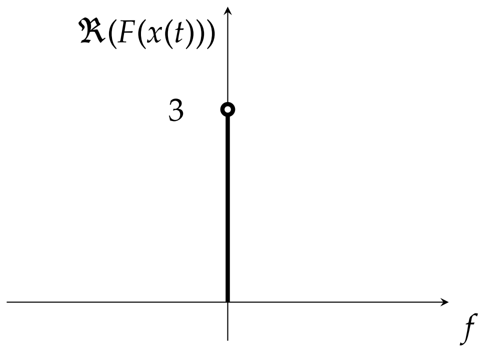


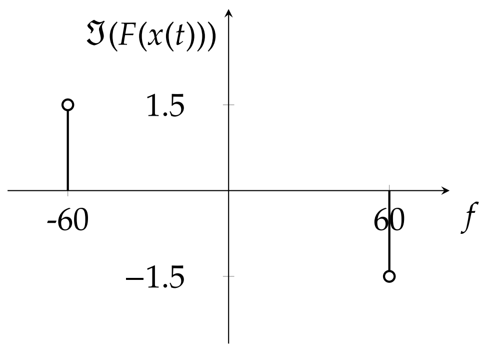
Esercizio 7 Dato il segnale analogico

$$x(t) = 3 + 3\sin(120\pi \cdot t)$$

1. Si calcoli la frequenza di campionamento minima secondo il criterio di Nyquist per campionare correttamente il segnale.
2. Si rappresenti graficamente la trasformata di Fourier del segnale.
3. Si definisca il passo di campionamento tale per cui il segnale campionato abbia una frequenza normalizzata pari a ¼.
4. Si calcoli il SNR per il segnale $x(t)$ quando venga adottato un quantizzatore con 8 bit e $\Delta = 0.047$

1. Facilmente si ottiene che la frequenza di Nyquist è 60 Hz e quindi la frequenza di campionamento necessaria per non introdurre alias è almeno 120 Hz.
2. Rappresentiamo la trasformata, facendo attenzione alla presenza della costante.





3. Il segnale campionato è della forma

$$x(t) = 3 + 3\sin(2\pi \cdot f_N \cdot t)$$

dove imponiamo $f_N = 1/4$.

Si ha $f = f_N \cdot f_C$, quindi

$$f_C = \frac{f}{f_N} = \frac{60\left[\frac{\text{cicli}}{s}\right]}{\frac{1}{4}\left[\frac{\text{cicli}}{\text{campione}}\right]} = 240\left[\frac{\text{campioni}}{s}\right]$$

Il passo di campionamento è quindi $1/240$.

4. A priori non possiamo stabilire se il quantizzatore è ideale e utilizziamo quindi la formula generale. La dinamica del segnale non dipende dalla costante, ma solo dall'ampiezza della sinusoide (quindi $3 \cdot 2 = 6$).

$$SNR_Q = 10\log_{10}\frac{A^2/2}{\Delta^2/12} \simeq 44\,\text{dB}$$

Possiamo stabilire che questo quantizzatore non è ideale in due modi. Una prima strada prevede di usare la formula del calcolo del SNR nel caso ideale con il numero di bit:

$$SNR_{QI} = 1.76 + 6.02 \cdot 8 \simeq 50\,\text{dB} \neq 44\,\text{dB}$$

Un altro modo è invece quello di confrontare la dinamica del quantizzatore con quella del segnale.

$$D_Q = L \cdot \Delta = 2^8 \cdot 0.047 = 12$$

che è diversa dalla dinamica del segnale $D_S = 2A = 6$. Per avere un quantizzatore ideale il passo Δ dovrebbe essere la metà: riporterebbe infatti la dinamica del quantizzatore a 6.